رياضيات ٤
(12)

١ – سنة رابعة رياضيات وميكانيك ح   العلامة: 100
امتحان رياضيات الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦ – ٢٠١٧م

السؤال الأول: (40)

10	9	8	7	6	5	4	3	2
ج	ج	أ	أ	ج	أ	ج	ب	ب
4	4	4	4	4	4	4	4	4

السؤال الثاني: (37)

من أجل ذلك نحسب $\vec{rot}\,\vec{F}$. لدينا:

$$\vec{rot}\,\vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -ayz & bxz & cxy \end{vmatrix} = (cx - bx)\vec{i} - (ay + cy)\vec{j} + (\ldots$$
$$= (c-b)x\vec{i} - (a+c)y\vec{j} + (a\ldots$$

$$\vec{F}(M).\vec{rot}\,\vec{F}(M) = -a(c-b)xyz - b(a+c)xyz + c(a+b)xyz$$
$$= [-ac + ab - ab - bc + ac + bc]\,xyz$$
$$= 0 \; ; \; \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{الفضاء}$$

بالتالي، فإنه يمكن إيجاد أن توازن تحت تأثير قوة الكتلة هذه $\vec{F}(M)$. 13

المعادلات التفاضلية لخطوط سوية الضغط والكثافة في هذا التوازن هي:

$$\frac{dx}{\frac{\partial Z}{\partial y}(M) - \frac{\partial Y}{\partial z}(M)} = \frac{dy}{\frac{\partial X}{\partial z}(M) - \frac{\partial Z}{\partial x}(M)} = \frac{dz}{\frac{\partial Y}{\partial x}(M) - \frac{\partial X}{\partial y}\ldots}$$

$\forall M \equiv (x,y,z) \in$ الكرة

بتعويض معطيات المسألة في المعادلات السابقة، $X(M) = ayz, Y(M) = -bxz, Z(M) = c\ldots$ نجد:

$$\frac{dx}{(a+b)x} = \frac{dy}{ay - ay} = \frac{dz}{-(b+a)z} \; ; \; \forall M \equiv (x,y,z) \in$$

(1) (2) (3)

من النسبة الأولى والثالثة نجد بعد الاختصار أن:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z} \Longrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

بالمكاملة الطرفين لدينا معطيات المسألة نجد:

$$\ln\frac{z}{c_1} = -\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow \frac{z}{c_1} = \frac{1}{x} \Rightarrow xz = c_1$$

حيث $c_1 > 0$ ثابت حقيقي اختياري.

من النسبة الأولى والثانية نجد بعد الاختصار أن: $dy = 0$ وبالمكاملة نجد: $y = c_2$ حيث $c_2 > 0$ ثابت حقيقي اختياري. بالتالي خطوط سوية الضغط والكثافة لهذا التوازن هي:

$$\begin{cases} xz = c_1 \\ y = c_2 \end{cases}$$

13

إن المعادلة التفاضلية الذاتية لأسرة سطوح سوية الضغط في السائل المتوازن هي:

$$X(M)\,dx+Y(M)\,dy+Z(M)\,dz=0\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in$$

$$X(M)=ayz,\quad Y(M)=-axz,\quad Z(M)=axy$$

هنا: من ذلك تصبح المعادلة السابقة نجد:

$$ayz\,dx-axz\,dy+axy\,dz=0\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in$$

بضرب المعادلة بعامل التكامل $\mu=\frac{1}{axyz}$، نجد:

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0\Rightarrow\frac{dz}{z}=\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}\quad *$$

بمكاملة طرفي * وبالأخذ بعين الاعتبار معطيات المسألة، نجد:

$$\ln\frac{z}{c}=\ln y-\ln x=\ln\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{z}{c}=\frac{y}{x}\Rightarrow z=c\,\frac{y}{x}$$

11 حيث $c>0$ ثابت حقيقي اختياري موجب، هي الأسرة المطلوبة.

السؤال الثالث: (23)

بما أن السائل متوازن تحت تأثير قوة الكتلة المعطاة، فحسب معادلة الشرط اللازم والكافي لتوازن سائل بالنسبة لقوة الكتلة، نجد الشرط التالي محقق:

$\rho\vec{F}(M)=\overrightarrow{grad}\,p(M)\ ;\ \forall M\in$ السائل المتوازن، حيث $\vec{P}_n(M)=-p(M)\,\vec{n}$ و $p(M):=|\vec{P}_n(M)|$ وذلك أيا كانت $M\equiv(x,y,z)$ من السائل المتوازن وأيا كان شعاع الوحدة $\vec{n}$. بإسقاط المعادلة الشعاعية السابقة على محاور الجملة $Oxyz$، ومن ثم بالأخذ بعين الاعتبار معطيات المسألة نجد:

$$2\rho\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{\partial p}{\partial x}(M),\quad 2\rho\left(y-\frac{1}{5}\right)=\frac{\partial p}{\partial y}(M)$$

$$2\rho\left(z-\frac{3}{4}\right)=\frac{\partial p}{\partial z}(M)$$

بضرب المعادلة الأولى بـ dy والثانية بـ dy والثالثة بـ dz ومن ثم بالجمع نجد:

$$2\rho\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)dx+\left(y-\frac{1}{5}\right)dy+\left(z-\frac{3}{4}\right)dz\right]=dp(M)$$

أو

$$d\left\{\rho\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2\right]\right\}=dp(M)\quad *$$

وطبعا هذا الكلام صحيح للسائل المتوازن G $\forall M\equiv(x,y,z)$.

بمكاملة طرفي * نجد أن:

$$p(M)=\rho\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2\right]+c_1\quad **$$

حيث c_1 ثابت حقيقي اختياري.

نحصل على الأسرة المطلوبة من ** بوضع $p(M)=c_2\ ;\ c_2\geq 0$، حيث نجد بعد الاختصار:

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=C$$

حيث C ثابت حقيقي اختياري موجب. وهذه سطوح سوية الضغط لهذا السائل المتوازن هي أسرة كرات مركزها $C=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{4}\right)$ وأنصاف أقطارها هي $\sqrt{C}$.

14

... السائل متوازن فعلاً سطحي مرة، فالسطح الكروي له (حسب ملاحظة سابقة)،
... ضغط لهذا السائل المتوازن.

... سطوح سوية للضغط لهذا السائل المتوازن هي أسرة كرات
... أن الدائرة، فإن السطح الكروي السابق هو سطح كرة مركزها: $C=(-\frac{2}{3}, ...)$
ونصف قطرها $\sqrt{c}$، ومعادلته هي:

$$(x+\frac{2}{3})^2+(y-\frac{1}{5})^2+(z-\frac{3}{4})^2=c$$

... c بما يتوافق مع السطح الكروي لهذا السائل المتوازن، مبتغين الرقم السابق.
... السائل المطلق $V=36\pi$ يجب أن يساوي $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{c})^3$، أي أن:

$$V=36\pi=\frac{4\pi}{3}(\sqrt{c})^3 \Longrightarrow 9=\frac{1}{3}(\sqrt{c})^3$$

$$\Longrightarrow (\sqrt{c})^3=27$$

... $\sqrt{c}=3$ وبالتالي $c=9$ ومعادلة السطح الكروي بالتالي هي:

9

$$(x+\frac{2}{3})^2+(y-\frac{1}{5})^2+(z-\frac{3}{4})^2=9$$

ملاحظة: (طريقة ثانية كل الطلب الأول (1) من سؤال السائل):
... المعادلة التفاضلية الديكارتية لأسرة سطوح سوية الضغط في هذا
السائل المتوازن هي:

$$X(M)dx+Y(M)dy+Z(M)dz=0 \; ; \forall M\equiv(x,y,z)\in ...$$

حيث هنا: $X(M)=2(x+\frac{2}{3})$, $Y(M)=2(y-\frac{1}{5})$, $Z(M)=2(z-\frac{3}{4})$

بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$2(x+\frac{2}{3})dx+2(y-\frac{1}{5})dy+2(z-\frac{3}{4})dz=0, \forall M\equiv(x,y,z) \in ...$$

وبالمكاملة نجد:

$$(x+\frac{2}{3})^2+(y-\frac{1}{5})^2+(z-\frac{3}{4})^2=c$$

حيث $c>0$ ثابت حقيقي اختياري.
... سطوح سوية الضغط لهذا السائل المتوازن هي أسرة كرات متحدة المركز:
$C=(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{4})$ وأنصاف أقطارها $\sqrt{c}$.

14

مدرس المقرر
د. منتجب يحسن